CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

JEFFERSON ARAUJO DOS SANTOS

PERMUTAÇÃO CAÓTICA NO ENSINO MÉDIO: UMA BREVE INVESTIGAÇÃO

IFRJ – CAMPUS PARACAMBI

2015

JEFFERSON ARAUJO DOS SANTOS

PERMUTAÇÃO CAÓTICA NO ENSINO MÉDIO: UMA BREVE INVESTIGAÇÃO

Monografia apresentada à coordenação do Curso de Licenciatura em Matemática, como cumprimento parcial das exigências para conclusão do curso.

Orientador: Poncio Mineiro

IFRJ – CAMPUS PARACAMBI
1° SEMESTRE/2015

DEDICATÓRIA

Dedico este trabalho à minha família, que muito me apoiou para concretização de tal sonho. ***"Um sonho sonhado sozinho é apenas um sonho. Um sonho sonhado em conjunto é realidade."*****.**

Pai, mãe e irmã eu amo vocês!

AGRADECIMENTOS

A Deus

Louvo, agradeço e engrandeço ao meu Jesus que me sustentou mais uma vez e me permitiu galgar voos mais altos. Se não fosse pelo SENHOR eu não estaria aqui. Obrigado, meu Deus!

Aos meus pais – Daniel e Luciene

Obrigado por sempre disponibilizarem todo suporte necessário, pelo cuidado constante e, principalmente, por acreditarem e confiarem em mim quando nem mesmo eu acreditava. Eu amo vocês!

À minha irmã – Jéssica

Obrigado por me ajudar fazendo todo o possível para que tudo corresse bem, por sempre ser atenciosa e prestativa. Adoro você. Você é a melhor irmã que tenho...rsrsrs

À minha irmã emprestada – Regiane

Obrigado pela força durante esses quatro anos, por todas as orações; toda atenção e carinho. Você é demais!

Ao meu orientador – Poncio

Muito obrigado por acreditar em mim e em meu trabalho. Por toda orientação dentro e fora deste projeto. Por ser um exemplo, não só de professor, mas também de ser humano. Você é ninja, ensina até quando não tem intenção!

Aos meus mestres – Professores

Agradeço a todos, afinal de contas eu sou resultado de parte do trabalho de vocês. Sem vocês, não chegaria onde cheguei.

Aos amigos e colegas

Muito obrigado pela parceria. Agradeço pela força; companhia; caronas; risadas; saídas e muito mais. Vocês são peças fundamentais.

À minha banca – Isabel e Fábio

Obrigado pela atenção e por analisarem o trabalho com afinco para um melhor resultado final.

RESUMO

Apesar de possibilitar aplicações no cotidiano, o estudo de Análise Combinatória apresenta grande dificuldade tanto para alunos do Ensino Médio quanto para professores. Por esta razão, a opção por um ensino superficial é priorizada em detrimento à discussão de problemas mais elaborados e seus consequentes aprofundamentos. A permutação caótica (ou desarranjo), por exemplo, integra o estudo de Combinatória e é pouco desenvolvida em sala de aula. Este trabalho tem por objetivo relatar uma experiência realizada com alunos dos primeiros períodos de um curso de licenciatura em Matemática, envolvendo permutações caóticas.

Palavras chave: Ensino de Matemática; Análise Combinatória; Permutações Caóticas.

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO	06
JUSTIFICATIVA	06
PROBLEMA	08
OBJETIVOS	08
FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA	09
METODOLOGIA	14
CONCLUSÕES	16
REFERÊNCIAS	21
ANEXO 1	23
ANEXO 2	24
ANEXO 3	26

1. INTRODUÇÃO

O estudo de Análise Combinatória originou-se com os jogos de azar. Tal ferramenta nos possibilita não só escolher racionalmente melhores opções para resolver problemas do cotidiano, mas também é um instrumento fundamental na interpretação e no auxílio da contagem de soluções para problemas matemáticos mais avançados.

> A origem da Análise Combinatória está no jogo de azar, tais como lançamento de dados, jogos de carta etc. Porém, muito tempo se passou para associar os jogos com um raciocínio matemático. Quase todas as culturas primitivas praticavam algum tipo de jogo, mas somente no século XVII houve um bom desenvolvimento do assunto, devido à necessidade de se resolver problemas de contagem oriundos da teoria das probabilidades (BOYER, 1996; p.265).

Os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) destacam alguns motivos relevantes sobre a importância de se estudar Análise Combinatória.

> As habilidades de descrever e analisar um grande número de dados, realizar inferências e fazer predições com base numa amostra de população, aplicar as ideias de probabilidade e combinatória a fenômenos naturais e do cotidiano são aplicações da Matemática em questões do mundo real que tiveram um crescimento muito grande e se tornaram bastante complexas. Técnicas e raciocínios estatísticos e probabilísticos são, sem dúvida, instrumentos tanto das ciências da Natureza quanto das Ciências Humanas. Isto mostra como será importante uma cuidadosa abordagem dos conteúdos de contagem, estatística e probabilidades no Ensino Médio... (BRASIL, 1998, p.257).

As matrizes de referência do Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM), por exemplo, destacam algumas habilidades importantes como *"Resolver situação-problema cuja modelagem envolva conhecimentos algébricos."* e *"Avaliar propostas de intervenção na realidade utilizando conhecimentos algébricos."*. Visto que tal exame, atualmente, serve como instrumento para ingresso na maioria dos cursos de graduação nas instituições de ensinos superiores, torna-se fundamental um ensino de qualidade sobre tal assunto.

> O principal objetivo do Enem é avaliar o desempenho do aluno ao término da escolaridade básica, para aferir desenvolvimento de competências fundamentais ao exercício pleno da cidadania. O Exame foi criado com a finalidade de uma modalidade alternativa ou complementar aos exames de acesso aos cursos profissionalizantes pós-médio e ao ensino superior. (IBGE, 2011)

2. JUSTIFICATIVA

A maioria dos problemas de Análise Combinatória desenvolvidos no Ensino Médio consiste em contar elementos de um determinado conjunto finito que contemplem certas condições preestabelecidas. Como desde o Ensino Fundamental os alunos são apresentados a situações semelhantes de contagem, nota-se claramente que o contato com a Análise Combinatória acontece bem antes da apresentação formal que ocorre, geralmente, na segunda série do Ensino Médio.

> A procura por técnicas de contagem está diretamente vinculada à história da Matemática e à forma pela qual as pessoas têm seu primeiro contato com esta disciplina. A primeira técnica matemática aprendida por uma criança é "contar", ou seja, enumerar os elementos de um conjunto de forma a determinar quantos são os seus elementos. As operações aritméticas são também motivadas (e aprendidas pelas crianças) através de sua aplicação a problemas de contagem. (LIMA et al., 2006, p. 17).

O estudo de Combinatória envolve ideias fundamentais para que os alunos possam perceber e resolver aplicações práticas do cotidiano. Portanto, faz-se necessário um estudo sobre as possíveis formas de se explorar tal assunto no Ensino Médio. Penso que independente das diversas maneiras de apresentar e desenvolver tal assunto, é preciso sempre conduzir o aluno a resolver múltiplas situações problemas e não sistematizar os conteúdos em meras aplicações de fórmulas que, em sua maioria, não são bem compreendidas.

> Aprender Matemática de uma forma contextualizada, integrada e relacionada a outros conhecimentos traz em si o desenvolvimento de competências e habilidades que são essencialmente formadoras, à medida que instrumentalizam e estruturam o pensamento do aluno, capacitando-o para compreender e interpretar situações para se apropriar de linguagens específicas, argumentar, analisar e avaliar, tirar conclusões próprias, tomar decisões, generalizar e para muitas outras ações necessárias à sua formação. (BRASIL, 1997).

No ENEM, por exemplo, Combinatória e Probabilidade são assuntos frequentes. Dentre os aspectos diversos que podem ser cobrados nesse exame, destaca-se um tipo de grupamento chamado permutação caótica. Tal grupamento é raramente trabalhado no Ensino Médio. Na prática, quase nunca é sequer comentado! Acredito que tal fato é resultado da insegurança ou desconhecimento do assunto pela maioria dos professores atuantes.

> A grande maioria dos profissionais de educação responsabiliza a falta de domínio de conteúdo como o fator decisivo para gerar a dificuldade do ensino. O fato dos problemas de contagem exigirem certa sagacidade ao interpretar as questões faz com que os professores se sintam intimidados perante problemas novos. Pode-se verificar que a dificuldade não está em compreender os conceitos básicos da Análise Combinatória, mas sim ao interpretar questões que, na sua maioria, apresentam informações que precisam ser minuciosamente analisadas, apesar de fácil e breve enunciação. (GONÇALVES, 2014, p. 38)

A principal motivação para o desenvolvimento deste trabalho surgiu durante a análise de uma questão proposta no ENEM 2009 (ANEXO 1). O problema versava sobre probabilidade e envolvia ideias relacionadas às permutações caóticas.

3. PROBLEMA

Na tentativa de verificar o comportamento de alunos dos períodos iniciais de um curso de licenciatura em Matemática, foi proposta uma tarefa que consistia na resolução de três problemas correlatos que envolviam a noção de permutação caótica:

a) De quantos modos é possível reorganizar uma pilha de livros com três livros, de maneira que nenhum fique na posição inicial?

b) (Enem adaptada / Prova cancelada 2009/ Questão 79): Em um concurso realizado em uma lanchonete, apresentavam-se ao consumidor quatro cartas voltadas para baixo, em ordem aleatória, diferenciadas pelos algarismos 0, 1, 2 e 5. O consumidor selecionava uma nova ordem ainda com as cartas voltadas para baixo. Ao desvirá-las, verificava-se quais delas continham o algarismo na posição correta do número 12,50 que era o valor, em reais, do trio-promoção. Para cada algarismo na posição acertada, ganhava-se um real de desconto. Por exemplo, se a segunda carta da sequência escolhida pelo consumidor fosse 2 e a terceira fosse 5, ele ganharia dois reais de desconto. Determine o número de sequências que podem ser formadas de modo que o consumidor não ganhe nenhum desconto.

c) Em um vilarejo existem dez casas, todas pintadas de cores diferentes. Os moradores desse vilarejo resolveram fazer um mutirão para reformar todas as casas. No momento em as casas estavam prontas para serem pintadas, eles decidiram que nenhuma casa deveria ter sua cor de origem. Sabendo que os moradores dispunham de dez cores distintas, sendo elas as cores originais das casas e que todas devem ser utilizadas, de quantas maneiras é possível repintar as casas do vilarejo?

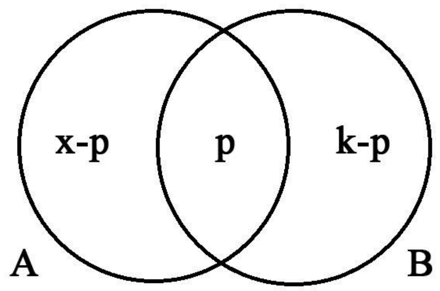
4. OBJETIVOS

Dois objetivos permeiam o trabalho em questão. O primeiro é discutir – no universo de jovens que ingressaram no curso de licenciatura em Matemática no IFRJ - Paracambi – quantos nunca tiveram contato com permutações caóticas durante o Ensino Médio, apesar de tal assunto figurar entre os tópicos a serem avaliados pelo ENEM, exame necessário para o ingresso de tais alunos. O segundo seria refletir sobre o comportamento dos alunos quando a eles fossem apresentados os problemas sobre permutações caóticas e compreender as possíveis estratégias de solução exploradas.

5. FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Neste tópico, antes da demonstração da fórmula de permutações caóticas, usaremos algumas ferramentas – que também serão demonstradas – como o princípio da inclusão e exclusão (PIE). Tal assunto é apresentado aos alunos quando estudam conjuntos. Problemas envolvendo dois ou até três conjuntos são frequentes no primeiro ano do Ensino Médio, quando diversas questões são exploradas através dos diagramas de Venn. O PIE consiste em contar quantos elementos existem na união de conjuntos não disjuntos. A discussão acerca do PIE para um número de conjuntos igual ou superior a quatro geralmente não é feita durante o Ensino Médio.

Suponhamos que haja x elementos em um conjunto A, k elementos em um conjunto B e que A e B sejam conjuntos não disjuntos, isto é, $\mathrm{n}(A \cap B) = p$.



Considerando $n(A)$ a quantidade de elementos pertencentes ao conjunto A, a quantidade de elementos pertencentes a união de A e B e dada por

$$n(A \cup B) = (x - p) + (p) + (k - p)$$
$$n(A \cup B) = x - p + p + k - p$$
$$n(A \cup B) = x + k - p$$
$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

Fica claro perceber que, na tentativa de contar os elementos da união de dois conjuntos não disjuntos, não basta somar o total de elementos de um com o total de elementos do outro. Tal operação contabiliza a intersecção dos conjuntos duas vezes, por isso então tal intersecção é descontada uma vez. Portanto, para dois conjuntos, o princípio da inclusão e exclusão se aplica da seguinte maneira:

$$\boxed{\boldsymbol{n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)}}$$

5.1. Princípio da inclusão e exclusão

Sejam $A_1, A_2, A_3, A_4, \ldots, A_p$ conjuntos finitos e disjuntos. Então,

$$\boldsymbol{n\left(\bigcup_{i=1}^{p} A_i\right) = \sum_{i=1}^{p} n(A_i) - \sum_{1\le i<j}^{p} n(A_i \cap A_j) + \sum_{1\le i<j<k}^{p} n(A_i \cap A_j \cap A_k)}$$
$$\boldsymbol{- \sum_{1\le i<j<k<l}^{p} n(A_i \cap A_j \cap A_k \cap A_l) + \cdot + (-1)^{p-1} . n(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap \cdot \cap A_p)}$$

Com i, j, k, l, ...$\in$ N

Pelo que fora comentado acima, dados dois conjuntos A e B, não disjuntos, isto é, $(A \cap B) \neq \{\ \}$, vale a seguinte afirmação $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$. Demonstraremos a seguir que o princípio da inclusão e exclusão abrange também três e quatro conjuntos.

Dados três conjuntos A, B e C, não disjuntos:

$$\boldsymbol{n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - [n(A \cap B) + n(B \cap C) + n(A \cap C)] + n(A \cap B \cap C)}$$

Demonstração:

$n(A \cup B \cup C) = n((A \cup B) \cup B)$. Pelo princípio da inclusão e da exclusão para dois conjuntos, temos:

$$\begin{aligned} n(A \cup B \cup C) &= n(A \cup B) + n(C) - n((A \cup B) \cap C) \\ &= [n(A) + n(B) - n(A \cap B)] + n(C) - n((A \cap C) \cup (B \cap C)) \\ &= [n(A) + n(B) - n(A \cap B)] + n(C) - [n(A \cap C) + n(B \cap C) - n(A \cap C \cap B \cap C)] \\ &= n(A) + n(B) - n(A \cap B) + n(C) - n(A \cap C) - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C) \end{aligned}$$
$$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - [n(A \cap B) + n(B \cap C) + n(A \cap C)] + n(A \cap B \cap C)$$

Dados quatro conjuntos A, B, C e D, não disjuntos:

$$\boldsymbol{n(A\cup B\cup C\cup D) = n(A)+n(B)+n(C)+n(D)-[n(A\cap B)+n(A\cap C)+n(A\cap D)+n(B\cap C)+ n(B\cap D)+n(C\cap D)]+[n(A\cap B\cap C)+n(A\cap B\cap D)+n(A\cap C\cap D)+ n(B\cap C\cap D)]-n(A\cap B\cap C\cap D)}$$

Demonstração:

$$\begin{aligned}
n(A\cup B\cup C\cup D) &= n((A\cup B)\cup(C\cup D))\\
&= n(A\cup B)+n(C\cup D)-n((A\cup B)\cap(C\cup D))\\
&= n(A\cup B)+n(C\cup D)-n((A\cap(C\cup D))\cup(B\cap(C\cup D)))\\
&= n(A\cup B)+n(C\cup D)-n(((A\cap C)\cup(A\cap D))\cup((B\cap C)\cup(B\cap D)))\\
&= n(A\cup B)+n(C\cup D)-[n((A\cap C)\cup(A\cap D))+n((B\cap C)\cup(B\cap D))-\\
&\quad n(((A\cap C)\cup(A\cap D))\cap n((B\cap C)\cup(B\cap D)))]\\
&= n(A\cup B)+n(C\cup D)-[n((A\cap C)\cup(A\cap D))+n((B\cap C)\cup(B\cap D))-\\
&\quad n((((A\cap C)\cap(B\cap C))\cup((A\cap D)\cap(B\cap C)))\cup(((A\cap C)\cap(B\cap D))\cup\\
&\quad ((A\cap D)\cap(B\cap D)))]\\
&= n(A\cup B)+n(C\cup D)-[n((A\cap C)\cup(A\cap D))+n((B\cap C)\cup(B\cap D))-\\
&\quad n(((A\cap B\cap C)\cup(A\cap B\cap C\cap D))\cup((A\cap B\cap C\cap D)\cup(A\cap B\cap D))]\\
&= n(A\cup B)+n(C\cup D)-[n((A\cap C)\cup(A\cap D))+n((B\cap C)\cup(B\cap D))-\\
&\quad n((A\cap B\cap C)\cup(A\cap B\cap C\cap D)\cup(A\cap B\cap D)]\\
&= n(A)+n(B)-n(A\cap B)+n(C)+n(D)-n(C\cap D)-[n(A\cap C)+n(A\cap D)-\\
&\quad n(A\cap C\cap A\cap D)+n(B\cap C)+n(B\cap D)-n(B\cap C\cap B\cap D)-[n(A\cap B\cap C)\cup\\
&\quad n((A\cap B\cap C\cap D)\cup(A\cap B\cap D))]\\
&= n(A)+n(B)+n(C)+n(D)-n(A\cap B)-n(C\cap D)-n(A\cap C)-n(A\cap D)+\\
&\quad n(A\cap C\cap D)-(B\cap C)-n(B\cap D)+n(B\cap C\cap D)+[n(A\cap B\cap C)+\\
&\quad n((A\cap B\cap C\cap D)\cup(A\cap B\cap D))-n(A\cap B\cap C)\cap((A\cap B\cap C\cap D)\cup\\
&\quad n(A\cap B\cap D))]\\
&= n(A)+n(B)+n(C)+n(D)-n(A\cap B)-n(C\cap D)-n(A\cap C)-n(A\cap D)+\\
&\quad n(A\cap C\cap D)-(B\cap C)-n(B\cap D)+n(B\cap C\cap D)+n(A\cap B\cap C)+\\
&\quad n(A\cap B\cap C\cap D)+n(A\cap B\cap D)-n((A\cap B\cap C\cap D)\cap(A\cap B\cap D))-\\
&\quad n((A\cap B\cap C)\cap n(A\cap B\cap C\cap D))\\
&= n(A)+n(B)+n(C)+n(D)-n(A\cap B)-n(C\cap D)-n(A\cap C)-n(A\cap D)+\\
&\quad n(A\cap C\cap D)-(B\cap C)-n(B\cap D)+n(B\cap C\cap D)+n(A\cap B\cap C)+\\
&\quad n(A\cap B\cap C\cap D)+n(A\cap B\cap D)-n(A\cap B\cap C\cap D)-n(A\cap B\cap C\cap D)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
n(A\cup B\cup C\cup D) &= n(A)+n(B)+n(C)+n(D)-[n(A\cap B)+n(A\cap C)+n(A\cap D)+n(B\cap C)+\\
&\quad n(B\cap D)+n(C\cap D)]+[n(A\cap B\cap C)+n(A\cap B\cap D)+n(A\cap C\cap D)+\\
&\quad n(B\cap C\cap D)]-n(A\cap B\cap C\cap D)
\end{aligned}$$

O processo é análogo se pensarmos em cinco, seis, sete ou n conjuntos não disjuntos. Um questionamento pertinente é: No uso do PIE, um determinado elemento I não pode ser contado mais de uma vez? A resposta negativa a tal fato pode ser justificada pelo argumento seguinte:

Considerando que x pertença a todos os elementos $A_1, A_2, A_3, A_4, ..., A_p$. Tal elemento será contado

- C_1^p vezes em $\sum_{i=1}^{p} n(A_i)$
- C_2^p vezes em $\sum_{1 \le i < j}^{p} n(A_i \cap A_j)$
- C_3^p vezes em $\sum_{1 \le i < j < k}^{p} n(A_i \cap A_j \cap A_k)$

$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$

- C_p^p vezes em $n(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap ... \cap A_p)$

Como x aparece em todos os conjuntos $A_1, A_2, A_3, A_4, ..., A_p$, x é contado em $A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup ... \cup A_p$, exatamente, $\left(C_1^p - C_2^p + C_3^p - C_4^p + \cdot (-1)^{p-1} \cdot C_p^p\right)$ vezes.

Se pensarmos no desenvolvimento do binômio de Newton para $(1-1)^p$, temos:

$$(1+(-1))^p = 1^p \cdot (-1)^0 \cdot C_0^p + 1^{p-1} \cdot (-1)^1 \cdot C_1^p + 1^{p-2} \cdot (-1)^2 \cdot C_2^p + \cdot + 1^0 \cdot (-1)^p \cdot C_p^p$$

$$0^p = C_0^p - C_1^p + C_2^p - C_3^p + \cdot (-1)^p \cdot C_p^p$$

$$0 = 1 - C_1^p + C_2^p - C_3^p + \cdot (-1)^p \cdot C_p^p$$

$$-1 = -C_1^p + C_2^p - C_3^p + \cdot (-1)^p \cdot C_p^p$$

Dividindo toda a expressão por – 1 , temos:

$$C_1^p - C_2^p + C_3^p - \cdot (-1)^{p-1} \cdot C_p^p = 1$$

Sendo assim, fica demonstrado que o elemento x é contado uma única vez na união dos conjuntos $A_1, A_2, A_3, A_4, ..., A_p$, sendo $p \in \mathbb{N}$.

5.2. Permutações caóticas

Seja um conjunto $\Omega = \{1, 2, 3, ..., n\}$. Denominam-se caóticas todas as permutações nas quais nenhum dos n elementos do conjunto Ω ocupa a posição de origem. Se D_n é o número de permutações caóticas de n elementos, então

$$\boxed{D_n = n! \cdot \left[\frac{1}{0!} - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{(-1)^n}{n!} \right]}$$

Demonstração:

Consideremos P o conjunto de todas as permutações possíveis do conjunto e φ_i o conjunto das permutações de Ω em que o número i ocupa a *i-ésima* posição, $i \in \Omega$. Sendo assim o número de permutações caóticas de Ω é dado por:

$$D_n = P - n(\varphi_1 \cup \varphi_2 \cup \varphi_3 \cup \cdots \cup \varphi_n)$$

Para calcularmos o valor de $n(\varphi_1 \cup \varphi_2 \cup \varphi_3 \cup \cdots \cup \varphi_n)$ usaremos o princípio da inclusão e exclusão.

$$n\left(\bigcup_{i=1}^{n} \varphi_i\right) = \sum_{i=1}^{n} n(\varphi_i) - \sum_{1 \le i < j}^{n} n(\varphi_i \cap \varphi_j) + \sum_{1 \le i < j < k}^{n} n(\varphi_i \cap \varphi_j \cap \varphi_k) - \sum_{1 \le i < j < k < l}^{n} n(\varphi_i \cap \varphi_j \cap \varphi_k \cap \varphi_l) + \cdot$$
$$(-1)^{n-1} \cdot n(\varphi_1 \cap \varphi_2 \cap \varphi_3 \cap \varphi_4 \cap \cdots \cap \varphi_n)$$

Calculando as parcelas dessa soma, temos:

$$S_1 = \sum_{i=1}^{n} n(\varphi_i) = n \cdot (n-1)! = n!$$

$$S_2 = \sum_{1 \le i < j}^{n} n(\varphi_i \cap \varphi_j) = C_2^n \cdot (n-2)! = \frac{n!}{2!}$$

$$S_3 = \sum_{1 \le i < j < k}^{n} n(\varphi_i \cap \varphi_j \cap \varphi_k) = C_3^n \cdot (n-3)! = \frac{n!}{3!}$$

$$S_4 = \sum_{1 \le i < j < k < l}^{n} n(\varphi_i \cap \varphi_j \cap \varphi_k \cap \varphi_l) = C_4^n \cdot (n-4)! = \frac{n!}{4!}$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$S_n = n(\varphi_1 \cap \varphi_2 \cap \varphi_3 \cap \varphi_4 \cap \cdots \cap \varphi_n) = C_n^n \cdot (n-n)! = \frac{n!}{n!}$$

Fazendo as devidas substituições temos:

$$n\left(\bigcup_{i=1}^{n}\varphi_i\right) = S_1 - S_2 + S_3 - S_4 + \cdots + (-1)^{n-1} S_n$$

$$n\left(\bigcup_{i=1}^{n}\varphi_i\right) = n! - \frac{n!}{2!} + \frac{n!}{3!} - \frac{n!}{4!} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{n!}{n!}$$

Voltando ao problema inicial, temos:

$$D_n = P - n(\varphi_1 \cup \varphi_2 \cup \varphi_3 \cup \cdots \cup \varphi_n)$$

$$D_n = P - n\left(\bigcup_{i=1}^{n}\varphi_1\right)$$

$$D_n = n! - \left(n! - \frac{n!}{2!} + \frac{n!}{3!} - \frac{n!}{4!} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{n!}{n!}\right)$$

$$D_n = n! - n! + \frac{n!}{2!} - \frac{n!}{3!} + \frac{n!}{4!} - \cdots + (-1)^{n}\frac{n!}{n!}$$

$$D_n = n! \cdot \left(1 - 1 + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \cdots + \frac{(-1)^n}{n!}\right)$$

$$D_n = n! \cdot \left(\frac{1}{0!} - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \cdots + \frac{(-1)^n}{n!}\right)$$

6. METODOLOGIA

Através da resolução de problemas muitos aspectos da Matemática são compreendidos, seja pelo desafio gerado por tal contato ou pela abrangência do assunto. Tal metodologia é responsável pela discussão de diversos temas relevantes no ensino de Matemática.

> Um dos aspectos fundamentais que rege as mudanças educacionais e estimula as diferentes pesquisas em educação são o fato de se buscar desenvolver nos alunos a capacidade de aprender a aprender. Nas diferentes etapas e áreas da educação percebe-se a necessidade de que os alunos obtenham habilidades e estratégias que lhes proporcionem a apreensão, por si mesmos, de novos conhecimentos e não apenas a obtenção de conhecimentos prontos e acabados que fazem parte da nossa cultura, ciência e sociedade. Uma das formas mais acessíveis de proporcionar aos alunos que aprendam a aprender é a utilização da resolução de problemas como metodologia de ensino. (PINTO, 2011)

Chegar a conclusões sem fundamentar o que se conclui é uma total incoerência. Portanto, se tornaria inviável comentar sobre o ensino de permutações caóticas no Ensino Médio sem antes fazer considerações importantes acerca do contato de tal público com o assunto. A partir do que preconiza Pólya, sugerir a resolução de problemas aos alunos é uma ótima oportunidade de conduzi-los a generalizações.

> Primeiro conjecture, depois prove — assim procede a descoberta na maioria dos casos. Você deveria saber disto (pela sua própria experiência, se possível) e deveria saber, também, que o professor de Matemática tem excelentes oportunidades de mostrar o papel da conjectura no processo de descoberta e assim imprimir em seus alunos uma atitude mental fundamentalmente importante. (PÓLYA, 1987)

Baseando em tal argumento, a estratégia pensada para que os alunos pudessem ter contato ou rever o assunto, foi distribuir um questionário, que não exigisse identificação (ANEXO 2), para discentes que estivessem cursando os quatro primeiros períodos do curso de licenciatura em Matemática do IFRJ-Paracambi, com alguns problemas envolvendo permutações caóticas.

> Os estudantes deveriam ter oportunidades frequentes para formular, tentar e solucionar problemas desafiadores que requerem uma quantidade significativa de esforço e deveriam, então, ser encorajados a refletir sobre seus conhecimentos. Assim, solucionar problemas não significa apenas resolvê-los, mas aplicar sobre eles uma reflexão que estimule seu modo de pensar, sua curiosidade e seus conhecimentos. (ROMANATTO, 2012, p. 302)

O primeiro dos problemas apresentados podia ser resolvido de maneira simples (pela mera enumeração dos elementos, por exemplo), e a medida que os próximos exercícios fossem apresentados o grau de dificuldade aumentava. Tal gradação fica clara quando se percebe o número de elementos envolvidos em cada uma das situações. No primeiro problema, três elementos; no segundo, quatro elementos e no terceiro, dez elementos. Além de, estatisticamente, ponderar o nível de "afinidade" de certo grupo de alunos com o assunto, o questionário tinha a clara intenção de aguçar a curiosidade dos questionados e fazê-los, de certa forma, perceber que existia um certo padrão entre os problemas, não citando em nenhum momento o termo permutações caóticas.

> Assim, entendemos que na resolução de problemas, os estudantes vão exercitar as suas mais diversas capacidades intelectuais como também mobilizar estratégias das mais diversas naturezas para encontrar a resposta, tais como: criatividade, intuição, imaginação, iniciativa, autonomia, liberdade, estabelecimento de conexões, experimentação, tentativa e erro, utilização de problemas conhecidos, interpretação dos resultados, etc. Enfim, é o que a Matemática pode fazer pelo estudante e não o contrário. A resolução de problemas relaciona uma Matemática mais intuitiva, mais experimental com a Matemática formal. (ROMANATTO, 2012, p. 303)

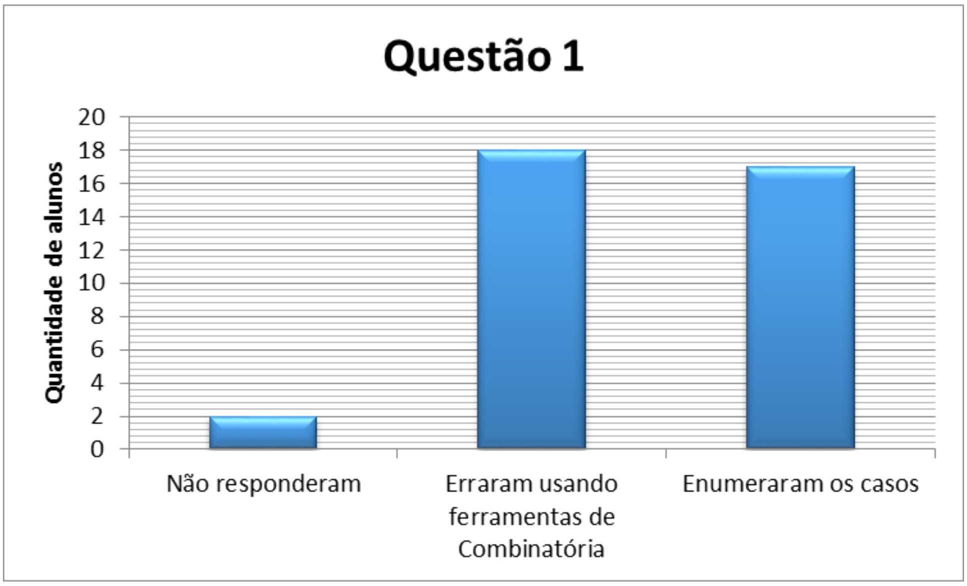
7. CONCLUSÕES

As conclusões a seguir são embasadas em dados estatísticos das respostas para cada um dos itens do questionário apresentado aos alunos.

7.1. Questão 1

De quantas maneiras é possível reorganizar uma pilha de livros com três livros, de maneira que nenhum fique na posição inicial?

Como já foi dito, as questões foram pensadas com grau de dificuldade gradativo. Então, a primeira questão poderia ser facilmente resolvida enumerando os casos ou fazendo $D_3 = 3!\cdot\left(\frac{1}{0!}-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}\right)=2$.



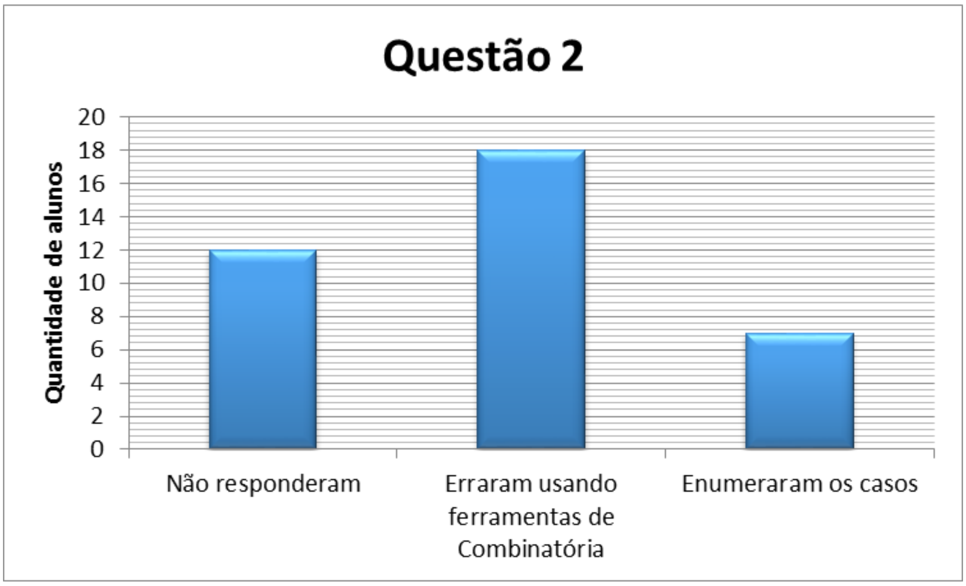
Considero importante deixar claro que alguns alunos que apresentaram solução enumerando os casos o fizeram de maneira correta, porém nem todos. Ou seja, mesmo uma questão relativamente elementar, que poderia ser resolvida com simples métodos de contagem, apresentou mais de 50% de erro. Conjecturamos que tal questão revela um aspecto muito recorrente tanto nos alunos quanto nos professores que trabalham com

Análise Combinatória: a crença de que a percepção sobre a solução correta de um problema está subordinada ao uso de alguma fórmula apresentada durante um curso de Análise Combinatória. A simples contagem utilizando-se algum tipo de representação por enumeração – apesar de bem natural e bastante utilizado nesse problema – foi ainda assim superada pela busca de uma suposta "solução perfeita" com base na utilização de fórmulas, teoricamente, "bem fundamentadas e compreendidas".

7.2. Questão 2

(Enem adaptada / Prova cancelada 2009/ Questão 79): Em um concurso realizado em uma lanchonete, apresentavam-se ao consumidor quatro cartas voltadas para baixo, em ordem aleatória, diferenciadas pelos algarismos 0, 1, 2 e 5. O consumidor selecionava uma nova ordem ainda com as cartas voltadas para baixo. Ao desvirá-las, verificava-se quais delas continham o algarismo na posição correta do número 12,50 que era o valor, em reais, do trio-promoção. Para cada algarismo na posição acertada, ganhava-se um real de desconto. Por exemplo, se a segunda carta da sequência escolhida pelo consumidor fosse 2 e a terceira fosse 5, ele ganharia dois reais de desconto. Determine o número de sequências que podem ser formadas de modo que o consumidor não ganhe nenhum desconto.

Para solução de tal questão se torna mais exaustivo a opção de enumerar os casos, então a melhor solução apresentada seria $D_4 = 4!\cdot\left(\frac{1}{0!} - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!}\right) = 9$.

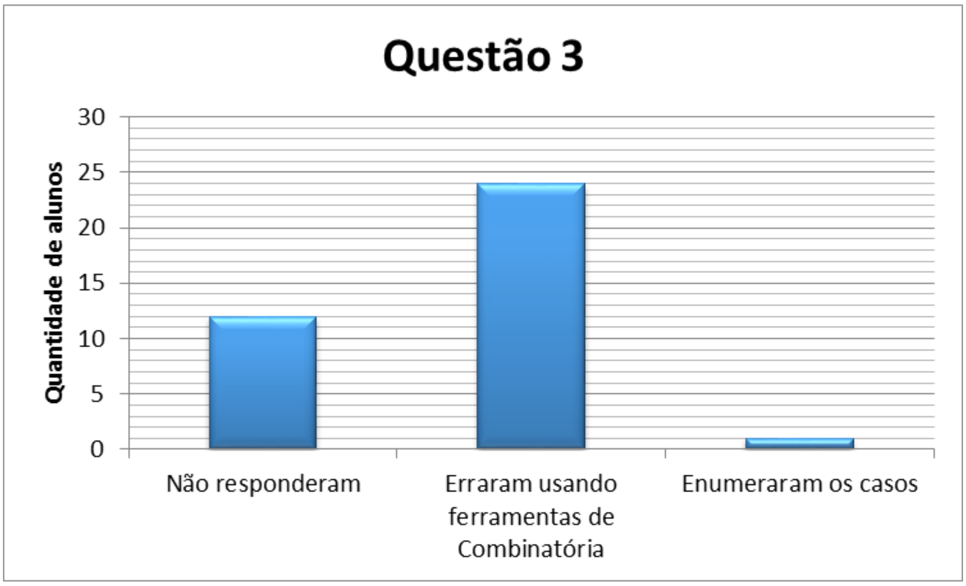


Dentre os alunos que apresentaram soluções erradas, uma solução muito presente foi baseada no uso do princípio da inclusão-exclusão: contar todas as possibilidades e descontar as que não eram interessantes para o problema. Apesar do uso de tal método não ser equivocado (afinal de contas, o princípio da inclusão-exclusão é utilizado em permutações caóticas), o erro acontecia na maneira como eram realizados os supostos descontos. Assim como ocorrera na questão 1, é muito forte a tentativa do uso de fórmulas da Análise Combinatória em detrimento à enumeração direta das soluções do problema.

7.3. Questão 3

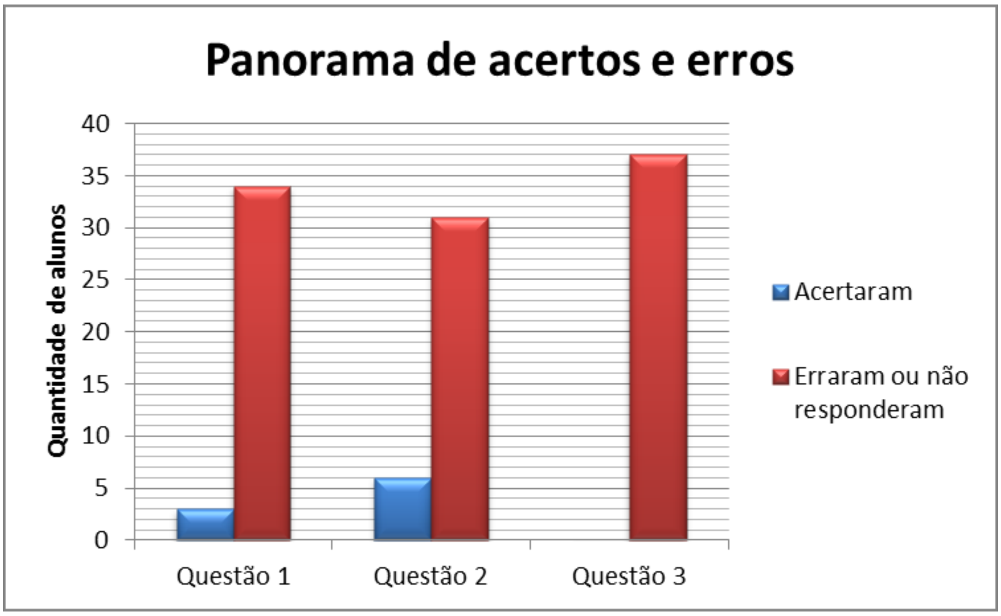
Em um vilarejo existem dez casas, todas pintadas de cores diferentes. Os moradores desse vilarejo resolveram fazer um mutirão para reformar todas as casas. No momento em as casas estavam prontas para serem pintadas, eles decidiram que nenhuma casa deveria ter sua cor de origem. Sabendo que os moradores dispunham de dez cores distintas, sendo elas as cores originais das casas e que todas devem ser utilizadas, de quantas maneiras é possível repintar as casas do vilarejo?

O processo de enumeração em tal questão é absolutamente inviável. O problema apresentava a seguinte solução: $D_{10} = 10! \cdot \left(\frac{1}{0!} - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!} - \frac{1}{7!} + \frac{1}{8!} - \frac{1}{9!} + \frac{1}{10!} \right) = 1334961.$



A última questão tinha o objetivo de mostrar quais alunos realmente conheciam as permutações caóticas. O gráfico acima nos diz que a maioria dos alunos sequer ouviu falar do assunto, fato que pode ser comprovado pelo panorama de acertos e erros a seguir.

7.4. Panorama geral



Esse panorama de acertos e erros é muito rico. Nos possibilita refletir sobre dois aspectos interessantes no tocante às permutações caóticas. O primeiro refere-se à urgente necessidade em se rediscutir o ensino de Análise Combinatória na Escola Básica. Será que é suficiente aos nossos alunos do Ensino Médio um contato tão breve com a Análise Combinatória? Na maioria das vezes, alguns aspectos sobre contagem são somente desenvolvidos em alunos do segundo ano do Ensino Médio e, mesmo assim, pelo que fora percebido neste panorama, tal apresentação carece de uma percepção para além de ideias e fórmulas mal compreendidas. Uma possível solução alternativa para tal situação fosse, talvez, a introdução de problemas de contagem – sem uso direto de fórmulas – pela simples enumeração de elementos, a partir do sexto ano do Ensino Fundamental. Tal processo poderia ser gradativamente desenvolvido até o terceiro ano do Ensino Médio, restando, assim, tempo para amadurecimento e fundamentação de ideias, incluindo nesse processo as permutações caóticas. Uma alternativa que procura contemplar tais ideias para o Ensino Médio é encontrada na proposta de mudança curricular de Matemática, sugerida pela Sociedade Brasileira de Matemática (SBM) e que se encontra no ANEXO 3.

O segundo aspecto interessante e muito mais preocupante, baseia-se no fato que tal análise fora feita com alunos dos quatro períodos iniciais da licenciatura em Matemática. Bem, estes alunos, em tese, tem uma proximidade maior com a Matemática, posto que decidiram fazer um curso de Licenciatura e, mesmo assim, mostram uma defasagem no tocante à Análise Combinatória. Um dos itens apresentados aos alunos no questionário do ANEXO 1, perguntava se estes haviam estudado Análise Combinatória no Ensino Médio. Surpreendentemente, em torno de 35% deles relataram não terem estudado tal assunto durante a Escola Básica. Como estes serão os futuros professores que atuarão nos Ensinos Fundamental e Médio, é urgente a necessidade de um resgate e de uma proposta alternativa a estes alunos em seus cursos de Licenciatura. Um olhar atento às matrizes curriculares se faz urgente.

Creio que o mais importante ponto que este trabalho exibe é a certeza e a necessidade de nos reinventar sempre. Revisitar assuntos explorados em algum momento de sua trajetória acadêmica é fundamental. Envolver-se em assuntos novos é vital para um professor e, consequentemente, para seus alunos. Como disse Paulo Freire, "*Estudar não é um ato de consumir ideias, mas de criá-las e recriá-las"*. Para além das análises matemáticas, o professor precisa a todo instante estar atento às suas ações para um maior êxito de sua missão de ensinar. Deve, sobretudo, manter-se firme em sua única certeza: que educar é um constante transformar-se.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BOYER, Carl B: **História da Matemática**. 2. ed. Trad. Elza F. Gomide., Edgard Blüche/Edusp, São Paulo, 1996.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Média e Tecnológica**.** **Parâmetros Curriculares Nacionais:** ensino médio. Brasília: MEC, 364 p., 1999.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais:** matemática. Brasília:MEC/SEF, 1997.

GONÇALVES, R.R.S. **Uma abordagem alternativa para o ensino de Análise Combinatória no Ensino Médio**. Rio de Janeiro: IMPA, 2014.

INSTITUTO BRASILEIRO DE ESTATÍSTICA E GEOGRAFIA. 2011. Disponível em: <http://ces.ibge.gov.br/base-de-dados/metadados/inep/exame-nacional-do-ensino-medio-enem>. Acesso em: 10 Jul. 2015.

LIMA, E.L; CARVALHO, P.C.P.; WAGNER, E.; MORGADO, A.C. **A Matemática do Ensino Médio**. vol. 2**.** Rio de Janeiro: SBM, 2006.

ONUCHIC, L.R.; ALLEVATO, N.S.G. **Pesquisa em Resolução de Problemas: caminhos, avanços e novas perspectivas.** São Paulo: UNESP, p.80-85, 2011.

PINTO, N.B. **Metodologia da Resolução de Problemas**. Disponível em: <http://www.ufrrj.br/emanped/paginas/conteudo_producoes/docs_24/metodologia.pdf>. Acesso em: 03 Ago. 2015.

PÓLYA, G. **A Arte de Resolver Problemas Um Novo Aspecto Do Método Matemático.** Tradução e Adaptação de Heitor Lisboa de Araújo. Rio de Janeiro/RJ, 1995.

PÓLYA, G. **Os Dez Mandamentos para Professores**. Revista do Professor de Matemática, São Paulo, n.10, p. 2 – 10, 1987.

ROMANATTO, M. C. **Resolução de problemas nas aulas de Matemática**. Revista Eletrônica de Educação. São Carlos, SP: UFSCar, v. 6, n. 1, p.299-311, mai. 2012. Disponível em: <http://www.reveduc.ufscar.br>. Acesso em: 10 Ago. 2015.

ROMBERG, T. A. Perspectivas sobre o Conhecimento e Métodos de Pesquisa. Tradução: ONUCHIC, L.; BOERO, M.L. In: **BOLEMA - Boletim de Educação Matemática**. Rio Claro: UNESP, n.27, p.93-139, 2007.

SOCIEDADE BRASILEIRA DE MATEMÁTICA. **Contribuição da SBM para a discussão sobre Currículo de Matemática.** Disponível em <http://www.sbm.org.br/images/Contribuio_da_SBM_Ensino_Meio.pdf>. Acesso em 15 Ago. 2015

ANEXO 1

(ENEM/2009) Em um concurso realizado em uma lanchonete, apresentavam-se ao consumidor quatro cartas voltadas para baixo, em ordem aleatória, diferenciadas pelos algarismos 0, 1, 2, e 5. O consumidor selecionava uma nova ordem ainda com as cartas voltadas para baixo. Ao desvirá-las, verificava-se quais delas continham o algarismo na posição correta dos algarismos do número 12,50 que era o valor, em reais, do trio-promoção. Para cada algarismo na posição acertada, ganhava-se R$1,00 de desconto. Por exemplo, se a segunda carta da sequência escolhida pelo consumidor fosse 2 e a terceira fosse 5, ele ganharia R$2,00 de desconto.

Qual a probabilidade de um consumidor não ganhar qualquer desconto?

A. 1/24
B. 3/24
C. 1/3
D. ¼
E. 1/2

ANEXO 2

Prezado colega do IFRJ-Paracambi

Com o intuito de auxiliar-me nas minhas pesquisas para o Trabalho de Conclusão de Curso (TCC) da Licenciatura em Matemática, solicito sua ajuda para responder as perguntas abaixo. Você não precisa se identificar. Agradeço imensamente o auxílio.

Jefferson Araújo dos Santos

1. Você estudou Análise Combinatória em seu Ensino Médio?(

) Sim ( ) Não

2. Você cursou a maior parte de seu Ensino Médio em:

( ) Escola Pública ( ) Escola Privada

3. Em que ano você concluiu seu Ensino Médio?

( ) De 2010 a 2014 ( ) De 2005 a 2009 ( ) Antes de 2005

4. Em que período você se encontra no curso de Licenciatura em Matemática?

( ) 1° período ( ) 2° período ( ) 3° período ( ) 4° período

Nos itens seguintes, procure apresentar justificativas às questões mesmo que não consiga resolvê-las.

5. De quantas maneiras é possível reorganizar uma pilha de livros com três livros, de maneira que nenhum fique na posição inicial?

6. Em um concurso realizado em uma lanchonete, apresentavam-se ao consumidor quatro cartas voltadas para baixo, em ordem aleatória, diferenciadas pelos algarismos 0, 1, 2 e 5. O consumidor selecionava uma nova ordem ainda com as cartas voltadas para baixo. Ao desvirá-las, verificava-se quais delas continham o algarismo na posição correta do número 12,50 que era o valor, em reais, do trio-promoção. Para cada algarismo na posição

acertada, ganhava-se um real de desconto. Por exemplo, se a segunda carta da sequência escolhida pelo consumidor fosse 2 e a terceira fosse 5, ele ganharia dois reais de desconto. Determine o número de sequências que podem ser formadas de modo que o consumidor não ganhe nenhum desconto.

7. Em um vilarejo existem dez casas, todas pintadas de cores diferentes. Os moradores desse vilarejo resolveram fazer um mutirão para reformar todas as casas. No momento em as casas estavam prontas para serem pintadas, eles decidiram que nenhuma casa deveria ter sua cor de origem. Sabendo que os moradores dispunham de dez cores distintas, sendo elas as cores originais das casas e que todas devem ser utilizadas, de quantas maneiras é possível repintar as casas do vilarejo?

ANEXO 3

TABELA DESCRITIVA DE ÁREAS POR SÉRIE

Séries	Números e Funções	Geometria	Matemática Discreta	Tratamento da Informação
1º	• Conjuntos e noções de lógica. • Conjuntos Numéricos. • Proporcionalidade. • Funções: aspectos gerais. • Funções Afim e Quadrática.	• Geometria Plana: congruência, semelhança e áreas. • Trigonometria do triângulo.	• Conjuntos e Contagem. • Aritmética.	• Noções de amostragem. • Organização de dados: distribuições de frequências e gráficos.
2º	• Sequências. • Outras funções reais. • Funções Exponenciais e Logarítmicas. • Equações e Sistemas Lineares.	• Perímetro e área de figuras semelhantes. • Círculo. • Geometria Espacial de Posição.	• Matemática Financeira. • Técnicas de Contagem.	• Medidas resumo e distribuição de dados.
3º	• Funções Trigonométricas. • Desigualdades e médias.	• Poliedros. • Áreas e Volumes. • Geometria Analítica.	• Probabilidade.	• Noções de Estatística bivariada.
Temas Suplementares	• Taxas de variação. • Outras funções trigonométricas. • Números Complexos. • Noções sobre matrizes e transformações elementares no plano e no espaço.	• Áreas de figuras planas: outras abordagens. • Vetores no plano. • Transformações geométricas e simetria.	• Grafos. • Aritmética. • Outros métodos de contagem.	